12-ЛЕКЦИЯ. Тұрақты коэффициентті сызықты біртекті жүйелерді интегралдау

Лекция мақсаты: Тұрақты коэффициентті **с**ызықты біртекті жүйелерді интегралдау әдістерімен тансытыру.

Негізгі сөздер: Сипаттаушы теңдеу, меншікті сандар, меншікті векторлар, квазикөпмүшелік.

Қысқаша мазмұны

Тұрақты коэффициентті сызықты біртекті жүйелерді интегралдау

4.1. Коэффициенттері тұрақты біртекті сызықты жүйені қарастырайық:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \qquad (1)$$

Мұнда $x = colon(x_1,...,x_n), A = (a_{ij})$ - тұрақты нақты квадрат матрица.

Бұл жүйенің шешімін Эйлер әдісі бойынша

$$x = \alpha e^{\lambda t} \tag{2}$$

түрінде іздейміз. Мұнда λ-белгісіз сан, α-нөлдік емес белгісіз тұрақты вектор.

Осы (2) өрнекті (1) жүйеге қойсақ,

$$(A - \lambda E)\alpha = 0 \tag{3}$$

түріндегі векторлық алгебралық теңдеу аламыз. Бұл теңдеуді ашып жазсақ,

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n = 0 \end{array}\right\} \tag{4}$$

түріндегі сызықты теңдеулер жүйесін аламыз. Жүйенің нөлдік емес шешімі бар болуы үшін оның анықтауышы нөлге тең болуы керек:

$$|A - \lambda E| = 0 \tag{5}$$

немесе

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

Осы теңдеу берілген жүйенің сипаттаушы теңдеуі деп аталады. Оның түбірлері A матрицасының меншікті сандары (мәндері), ал әрбір меншікті санға сәйкес α векторын A матрицасының меншікті векторы деп атайды.

Меншікті сандардың түрлеріне байланысты фундаменталь матрица әртүрлі болады.Сол жағдайларды қарастырайық.

1^0. Айталық, меншікті сандар әртүрлі нақты сандар болсын: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Осындағы белгілі бір λ_i меншікті санына сәйкес α_i векторының координаттары (4) жүйеден табылады. Ол үшін λ-ның орнына λ_i-ді қою керек. Егер $x_i = colon(x_{1i}, \ldots, x_{ni})$, ал $\alpha_i = colon(\alpha_{1i}, \ldots, \alpha_{ni})$ деп алсақ, онда λ_i-ге сәйкес шешім

$$x_{1i}(t) = \alpha_{1i} e^{\lambda_i t}, \ldots, x_{ni}(t) = \alpha_{ni} e^{\lambda_i t} \tag{7}$$

түрінде жазылады. Сондықтан, бұл жағдайда фундаменталь матрица былай жазылады:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Бұл матрицаның анықтауышы нөлге тең емес, өйткені оның әрбір бағанасы өзара тәуелсіз. Сондықтан, жалпы шешім

$$x(t) = C_1 \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + C_n \alpha_n e^{\lambda_n t} \tag{9}$$

түрінде жазылады немесе матрица түрінде

$$x(t) = \Phi(t)C \tag{10}$$

Мұндағы, C-бір бағаналы тұрақты матрица.

2^0. Айталық, $\lambda_1 = a + ib$ - сипаттаушы теңдеудің жәй түбірі болсын. Онда оның түйіндесі $\overline{\lambda}_1 = a - ib$ саны да сол теңдеудің түбірі болады. Бұл жағдайда сәйкес шешім

$$x_1(t) = (\gamma_{11} + i\gamma_{12}) e^{(a+ib)t} \tag{11}$$

түрінде жазылады. Соңғы қатынастың нақты және жорамал бөліктерін ажыратайық:

$$x_1(t) = (\gamma_{11} + i\gamma_{12}) e^{at}(\cos bt + i \sin bt) =$$
$$= e^{at}(\gamma_{11} \cos bt - \gamma_{12} \sin bt) + ie^{at}(\gamma_{12} \cos bt + \gamma_{11} \sin bt)$$

Жүйенің коэффициенттері нақты болғандықтан, комплекс шешімнің нақты және жорамал бөліктері өз алдарына нақты шешімдер болып табылады. Сондықтан,

$$x_{11}(t)=Re\,x_1(t)=e^{at}(\gamma_{11}\cos bt-\gamma_{12}\sin bt)$$
$$x_{12}(t)=Im\,x_1(t)=e^{at}(\gamma_{12}\cos bt+\gamma_{11}\sin bt) \qquad (12)$$

функциялары берілген жүйенің нақты шешімдері болады. Бұл шешімдер өзара сызықты тәуелсіз.Түйіндес $a-ib$ түбірі жаңа тәуелсіз шешімдер тудырмайды. Демек, бір пар комплексті түбірге өзара тәуелсіз екі нақты шешім сәйкес келеді. Олар өзара сызықты тәуелсіз болғандықтан, фундаменталь шешімдер жүйесіне кіреді. Осы сияқты, барлық түбірлер үшін нақты шешімдерді құрып шығуға болады. Олардың сызықты комбинациясы жүйенің жалпы шешімін береді.

3^0. Сипаттаушы теңдеудің түбірлерінің кейбіреулері еселікті түбірлер болатын жағдайды қарастырайық.

Айталық, λ_1-саны k - еселікті түбір болсын. Бұл түбірге бір немесе бірнеше меншікті векторлар сәйкес келуі мүмкін. Олардың саны жалпы алғанда k-дан аспайды. Сондықтан, (2) формула бойынша анықталатын шешімдердің саны k-дан кем болуы мүмкін. Осы жетпей жатқан шешімдерді толықтыру үшін төмендегідей әдіс қолданылады.

Айталық, $x(t)$ векторы (1) жүйенің шешімі болсын.

$D=\dfrac{d}{dt}$ - дифференциалдық оператор енгізу арқылы берілген жүйені координаттары бойынша ашып жазайық:

$$a_{i1}x_1+...+a_{in}x_n-Dx_i=0,(i=1,...,n) \qquad (13)$$

Бұл сызықты жүйенің анықтауышы $|A-ED|=M(D)$. Ол D-операторы бойынша n дәрежелі көпмүшелік. Егер D-ның орнына λ-ны қойсақ, ол сипаттаушы көпмүшелікке айналады.

Құрылған (13) қатынасты $|A-ED|$ анықтауышының алгебралық толықтауышы $A_{ij}(D)$-ға көбейтіп, i-индексі бойынша қосындыласақ,

$$M(D)x_i=0,(i=1,...,n) \qquad (14)$$

теңдеуін аламыз. Бұл x_i бойынша n-ретті дифференциалдық теңдеу. Оның сипаттаушы көпмүшелігі (1) жүйенің сипаттаушы көпмүшелігіне тең. Сондықтан, (5) теңдеудің k-еселікті λ_1 түбіріне сәйкес келетін (1) жүйенің $x(t)$ шешімінің i-інші компоненті мына түрде жазылады:

$$x_i(t)=(C_{1i}+C_{2i}t+...+C_{ki}t^{k-1})e^{\lambda_1 t}$$

Мұнда C_{ki}- тұрақты сандар. Сонымен,

$$x(t)=\begin{pmatrix} C_{11}+C_{21}t+...+C_{k1}t^{k-1} \\ .... \\ C_{1n}+C_{2n}t+...+C_{kn}t^{k-1}\end{pmatrix}e^{\lambda_1 t} \qquad (15)$$

Бұл шешімдегі $C_{ij}\,(i=1,...,k;\ j=1,...,n)$ тұрақты сандарының бәрі бірдей еркін бола алмайды, өйткені $x(t)$ шешімінің компоненттері (13) қатынас арқылы өзара сызықты байланысқан. Бұл тұрақтылардың ішінде тәуелсіздерінің саны λ_1 - түбірінің еселігіне тең, яғни k-ға тең. Осы еркін тұрақтыларды $C_1,...,C_k$- деп белгілейік. (15) шешімді (1) жүйеге қойып, алдын ала $e^{\lambda_1 t}$ - ға қысқартып, t-ның бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін теңестірсек, k біртекті теңдеулердің сызықты жүйесін аламыз. Ондағы белгісіз C_{ij} тұрақтыларының саны $k\times n$. Оларды $C_1,...,C_k$ еркін тұрақтылары арқылы өрнектесек, онда (15) шешімді былай жазуға болады:

$$x(t)=[C_1p_1(t)+...+C_kp_k(t)]e^{\lambda_1 t} \qquad (16)$$

Мұндағы, $p_i(t)$ - векторларының компоненттері t бойынша дәрежелері $k-1$ - ден аспайтын көпмүшеліктер құрайды.

Сонымен, сипаттаушы теңдеудің k еселікті λ_1 түбіріне $p_i(t)e^{\lambda_1 t}$ түріндегі шешім сәйкес қойылды. Осы сияқты кез келген k_s еселікті λ_s түбіріне де сәйкес шешім құрып шығуға болады. Олардың жиыны берілген жүйенің фундаменталь шешімдер жүйесі болатынын көрсету үшін вронскианның $t=0$ нүктесінде нөлге айналмайтынын көрсетсе, жеткілікті (дәлірек, дәлелдеуді [5] оқу құралынан көруге болады).